

УДК 624.131 + 532.215 + 534.22

В. Ф. Нестеренко

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В «ЗВУКОВОМ ВАКУУМЕ»

Распространение возмущений в дискретных сильнонелинейных средах, где нелинейность играет основную роль, а не служит малой поправкой к линейному описанию, теоретически и экспериментально исследовалось в работах [1—3]. Обнаружено, что для систем частиц взаимодействующих по закону $F = A\delta^{3/2}$, где δ — сближение центров, возможно существование уединенных волн нового типа, в которых максимальная деформация ξ_{\max} много больше начальной ξ_0 . Последние могут трансформироваться в классические солитоны уравнения Кортевега — де Вриза (КдВ) и в звуковые волны при $\xi_{\max} \approx \xi_0 > 0$. Для таких сред длинноволновая скорость звука $c_0 \rightarrow 0$ при $\xi_0 \rightarrow 0$, поэтому при данном условии по сути рассматривается распространение возмущений в своеобразном «звуковом вакууме».

Представляет интерес выяснить поведение волн в подобных средах в общем случае при показателе степени в законе взаимодействия соседних частиц $n \neq 3/2$ на примере простейших одномерных структур.

Запишем уравнение движения i -й частицы

$$\ddot{u}_i = A(u_{i-1} - u_i)^n - A(u_i - u_{i+1})^n, \quad N \geq i \geq 2, \quad (1)$$

где u_i — смещение частицы из положения равновесия A — константа взаимодействия; N — число частиц. Считая, что характерный пространственный размер возмущения $L \gg a$ (a — расстояние между центрами частиц в недеформированной системе), из (1) можно получить, аналогично [2], для $n > 0$ континуальное нелинейное длинноволновое уравнение, в котором оставлены члены порядка $(a/L)^2$ по отношению к основному и опущена конвективная производная скорости:

$$u_{tt} = c^2 n \left\{ (-u_x)^{n-1} u_{xx} + \frac{a^2}{12} (-u_x)^{n-1} u_{xxxx} - \frac{a^2}{6} (n-1) (-u_x)^{n-2} u_{xx} u_{xxx} + \right. \\ \left. + \frac{a^2}{24} (n-1)(n-2) (-u_x)^{n-3} u_{xx}^3 \right\}, \quad (2) \\ c^2 = Aa^{n+1}, \quad -u_x > 0, \quad n > 0.$$

Для стационарных решений вида $u(x - Vt)$, вводя деформацию $\xi = -u_x$ из (2), получаем

$$\frac{V^2}{c^2 n} \xi_x = \xi^{n-1} \xi_x + \frac{a^2}{6(n+1)} \left\{ \xi^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n+1}{\xi^2} \right)_{xx} \right\}_x. \quad (3)$$

Интегрирование (3) по x , обезразмеривание и замена переменных $(\xi, x) \rightarrow (y, \eta)$ позволяет получить следующее уравнение, аналогичное уравнению движения осциллятора в потенциальном поле $W(y)$:

$$y_{\eta\eta} = -\frac{\partial W(y)}{\partial y},$$

$$W(y) = \frac{y^2}{2} - \frac{(n+1)}{4} y^{\frac{4}{n+1}} + Cy^{\frac{2}{n+1}}, \quad (4)$$

$$\eta = \frac{x}{a} \sqrt{\frac{6(n+1)}{n}}, \quad y = \xi^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{c}{V}\right)^{\frac{n+1}{n-1}},$$

C — константа.

Легко заметить, что при $C > 0$ и $n > 1$ уравнение (4) имеет в частности солитоподобные решения, для которых (при $\xi_{\max} \gg \xi_0$)

$$\xi_{\max} = \left\{ \frac{V^2}{c^2} \frac{(n+1)}{2} \right\}^{\frac{1}{n-1}}; \quad L_n = \frac{\pi a}{(n-1)} \sqrt{\frac{n(n+1)}{6}}, \quad n > 1, \quad (5)$$

L_n — характерный пространственный размер.

При $n = 1 + \varphi$ ($0 < \varphi \ll 1$) очевидно качественное отличие данных солитонов (5) от линейных звуковых возмущений при $n = 1$, как и от солитонов КдВ. Солитоны подобного типа, характеризующиеся приростом деформации в волне, большим ее исходной величины ξ_0 , являются основным несущим тоном при импульсном возбуждении данной дискретной сильнонелинейной системы и заслуживают специального названия — пестоны. При $\xi_{\max} \rightarrow \xi_0$ пестоны трансформируются в солитоны КдВ, а далее — в звуковые возмущения. Наличие подобного рода стационарных решений для непрерывного спектра значений $n > 1$ ставит задачу построения новой сильнонелинейной волновой динамики, в частности проблеме корректности введения понятия звуковой волны для реальных сред, поскольку последнее основано на точном равенстве $n = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нестеренко В. Ф. Импульсное нагружение гетерогенных материалов. — Новосибирск: Наука, 1992. — 198 с.
2. Нестеренко В. Ф. Распространение нелинейных импульсов сжатия в зернистых средах // ПМТФ. — 1983. — № 5. — С. 136—148.
3. Лазариди А. И., Нестеренко В. Ф. Обнаружение уединенных волн нового типа в одномерной зернистой среде // Там же. — 1985. — № 3. — С. 115—118.

г. Новосибирск

Поступила в редакцию 16/II 1992